

Angles

Compétences à acquérir	Auto-évaluation
Connaître et appliquer les propriétés des angles alternes-internes	☆☆☆☆☆
Connaître et appliquer les propriétés des angles correspondants	☆☆☆☆☆
Caractériser le parallélisme avec des angles	☆☆☆☆☆

I. Reproduire un angle : rappels

1. Définition d'un angle

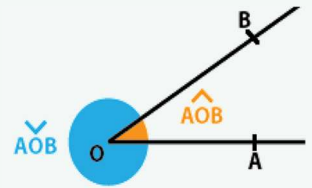


Définition :

Un **angle** est une partie du plan délimitée par **deux demi-droites de même origine**, appelé **sommet**.

En traçant deux demi-droites de même origine, on définit deux angles :

- Un **angle saillant** : c'est un angle dont la **mesure est inférieure à 180°** . On le note $\widehat{AOB}$.
- Un **angle rentrant** : c'est un angle dont la **mesure est supérieure à 180°** . On le note $\widehat{AOB}$.



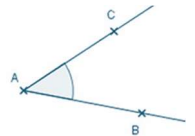
Remarque :

Dans le reste du cours, lorsqu'on parlera d'« angle », on considèrera les angles saillants.



Exemple :

Sur cette figure, l'angle défini par les demi-droites [AC) et [AB) est l'angle $\widehat{BAC}$ ou $\widehat{CAB}$. Le sommet de l'angle ainsi défini est A.



2. Mesurer un angle



Définition :

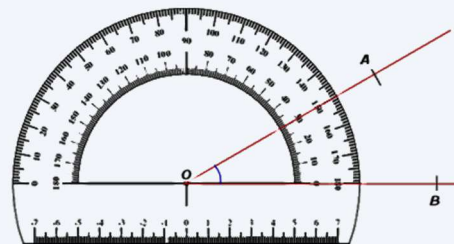
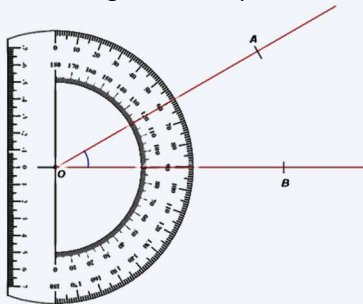
L'**unité** utilisée au collège pour **mesurer les angles** est le **degré**, noté $^\circ$.
L'instrument de mesure des angles est le **rapporteur**.



Méthode :

Pour déterminer la mesure d'un angle, il faut :

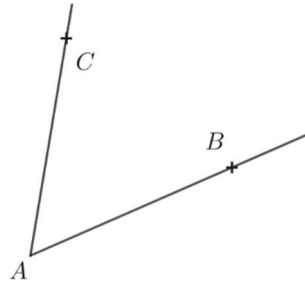
- Faire coïncider le centre du rapporteur avec le sommet de l'angle.
- Faire coïncider un côté de l'angle avec le 0° d'une des graduations.
- Lire la mesure sur la graduation qui coïncide avec l'autre côté de l'angle.





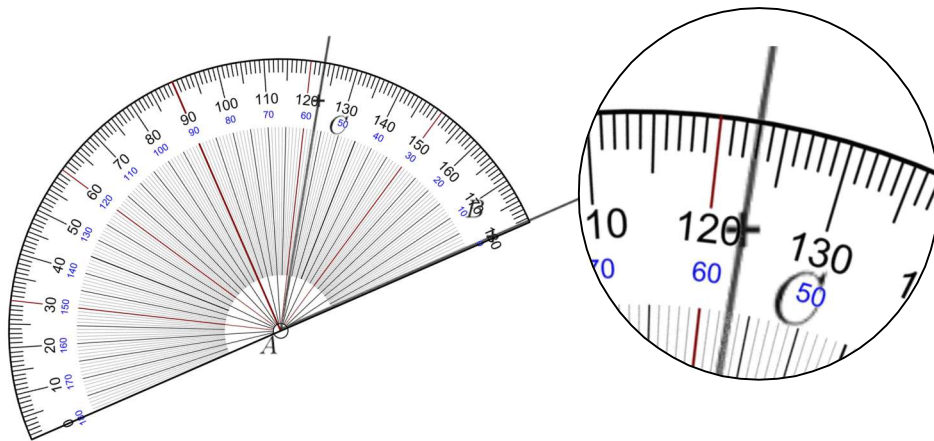
Exercice :

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ ci-dessous ?



Correction :

On a $\widehat{BAC} = 57^\circ$.



Vocabulaire :

On donne un certain nom aux angles en fonction de leur mesure.

Angle	Mesure	Figure
Nul	Egal à 0°	
Aigu	Entre 0° et 90°	
Droit	Egal à 90°	
Obtus	Entre 90° et 180°	
Plat	Egal à 180°	

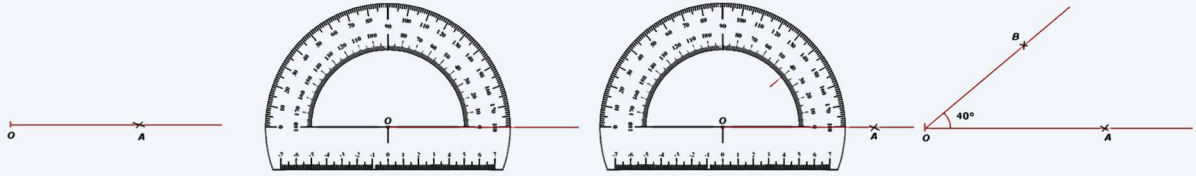
3. Construire un angle



Méthode :

Pour tracer un angle de mesure donnée, il faut :

- Tracer une demi-droite qui sera un des côtés de l'angle.
- Faire coïncider le centre du rapporteur avec l'origine et la graduation 0° sur la demi-droite tracée.
- Repérer la graduation associée à la mesure demandée, et tracer la demi-droite passant par cette graduation et l'origine.



Remarque :

Lorsque le segment tracé est trop court pour pouvoir lire l'angle ou placer correctement le rapporteur, il suffit de le prolonger.

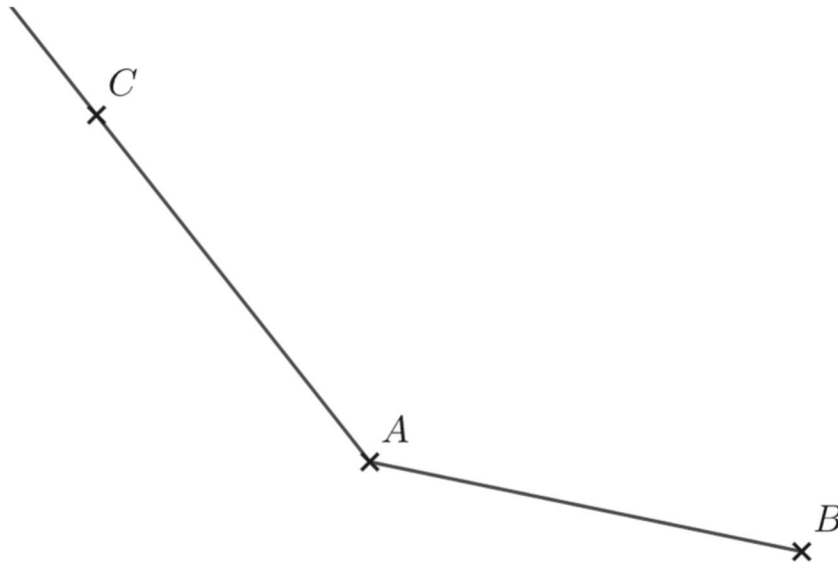


Exercice :

Placer un point C tel que l'angle $\widehat{ABC}$ mesure 140° .



Correction :



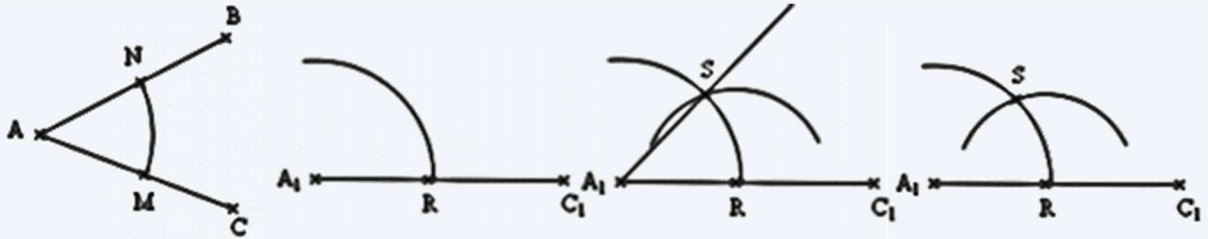
4. Reproduire un angle



Méthode :

Pour reproduire un angle $\widehat{BAC}$ au compas, il faut :

- Tracer un arc de cercle centré en A sur la figure initiale : il coupe [AB) en N et [AC) en M.
- Tracer une demi-droite $[A_1C_1)$ et un arc de cercle centré en A_1 ayant le même rayon qu'à l'étape précédente. Cet arc de cercle coupe $[A_1C_1)$ en R.
- Reporter la longueur MN de la figure initiale en pointant le compas en R. Il coupe l'arc de cercle tracé en S.
- Tracer la demi-droite $[A_1S)$. On a alors $\widehat{RA_1S} = \widehat{BAC}$.



Remarque :

Pour reproduire un angle il est aussi possible de le mesurer et de construire au rapporteur un angle de même mesure.

II. Quelques angles à retenir : rappels

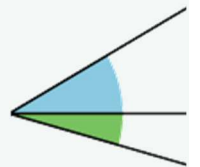
1. Angles adjacents



Définition :

Deux angles sont **adjacents** lorsque :

- Ils ont le **même sommet**
- Ils ont un **sommet en commun**
- Ils sont situés **de part et d'autre** du côté commun



Remarque :

Si l'un des points de la définition n'est pas respecté, les angles ne sont pas adjacents. Ces angles ne sont pas adjacents car ils n'ont pas le même sommet.



Ces angles ne sont pas adjacents car l'un contient l'autre.



2. Angles complémentaires



Définition :

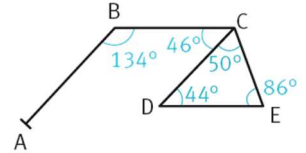
Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à **90°** .



Remarque :

Deux angles complémentaires ne sont pas forcément adjacents.

Par exemple, dans cette figure, les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ sont complémentaires. En effet $\widehat{BCD} + \widehat{CDE} = 46 + 44 = 90^\circ$.

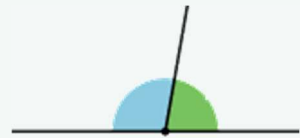


3. Angles supplémentaires



Définition :

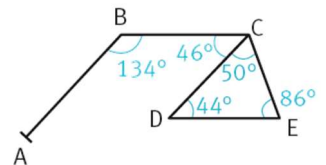
Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leurs mesures est égale à **180°** .



Remarque :

Deux angles supplémentaires ne sont pas forcément adjacents.

Par exemple, dans cette figure, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont supplémentaires. En effet $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 134 + 46 = 180^\circ$.



4. Angles opposés par le sommet



Définition :

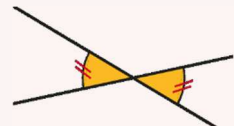
Deux angles sont **opposés par le sommet** lorsque :

- Ils ont **le même sommet**
- Leurs côtés sont **dans le prolongement l'un de l'autre**



Propriété :

Deux angles opposés par le sommet **ont la même mesure**.



III. Angles et parallélisme

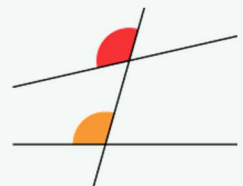
1. Angles correspondants



Définition :

Deux angles sont correspondants lorsque :

- Ils sont **non adjacents**
- Ils sont formés par **deux droites et une sécante à ces droites**
- L'un des angles **est interne et l'autre externe**
- Ils sont situés **du même côté de la sécante**.



Propriété :

Si (t) et (u) sont deux droites **parallèles** et (d) une sécante alors les **angles correspondants ont la même mesure**.



2. Angles alternes internes



Définition :

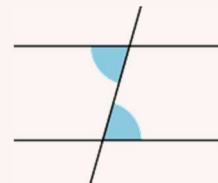
Deux angles sont alternes internes lorsque :

- Ils sont **non adjacents**
- Ils sont formés par **deux droites et une sécante à ces droites**
- Ils sont **internes** et de **part et d'autre de la sécante**.



Propriété :

Si (t) et (u) sont deux droites **parallèles** et (d) une sécante alors les **angles alternes-internes ont la même mesure**.



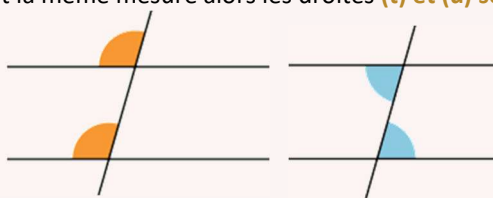
3. Caractérisation du parallélisme



Propriété :

Soient (t) et (u) sont deux droites coupées par une sécante (d).

- Si les angles correspondants ont la même mesure alors les droites **(t) et (u) sont parallèles**.
- Si les angles alternes-internes ont la même mesure alors les droites **(t) et (u) sont parallèles**.



4. Somme des angles d'un triangle : démonstration



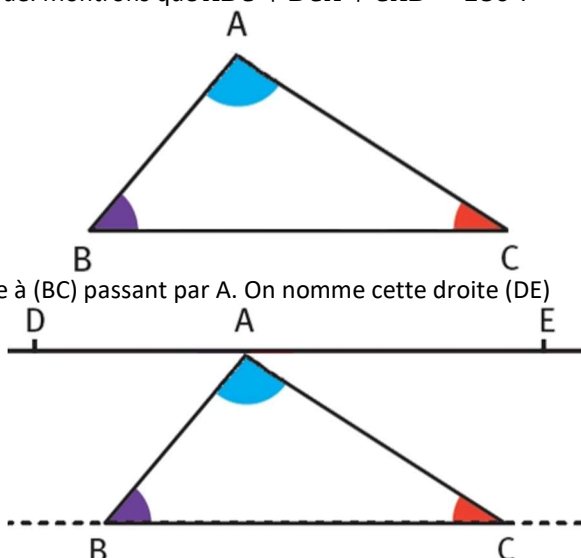
Propriété :

Dans un triangle, la somme de la mesure de ses angles est égale à **180°**.



Démonstration :

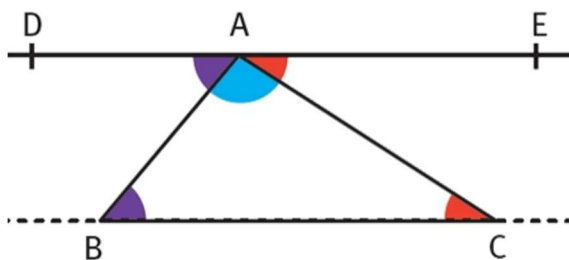
Soit ABC un triangle quelconque. Montrons que $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180^\circ$.



Pour cela, on trace la parallèle à (BC) passant par A. On nomme cette droite (DE)

Comme les droites (DE) et (BC) sont parallèles, si on considère :

- La sécante (AB), les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB}$ sont alternes-internes et sont donc de même mesure. On a alors $\widehat{ABC} = \widehat{DAB}$.
- La sécante (AC), les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{EAC}$ sont alternes-internes et sont donc de même mesure. On a alors $\widehat{BCA} = \widehat{EAC}$.



Les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CAB}$ sont adjacents, on a donc $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{CAB}$. De même les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{CAE}$ sont adjacents, on a donc $\widehat{DAE} = \widehat{DAC} + \widehat{CAE} = \widehat{DAB} + \widehat{CAB} + \widehat{CAE}$.

Donc $\widehat{DAE} = \widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}$. Or l'angle $\widehat{DAE}$ est un angle plat et sa mesure vaut 180° .

Donc $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = 180$