

Fractions

Compétences à acquérir	Auto-évaluation
Maîtriser la définition de fraction	☆☆☆☆☆☆
Simplifier des fractions	☆☆☆☆☆☆
Connaître les critères de divisibilité	☆☆☆☆☆☆

I. Notion de nombre rationnel

8 est le double de 4 ; soit 4 est la moitié de 8 ou 2 est 4 fois plus petit que 8.

En langage mathématique : $2 \times 4 = 8$ soit $8 \div 2 = 4$ ou $8 : 4 = 2$

28 est 4 fois plus grand que 7 ; soit 7 est 4 fois plus petit que 28 ou 4 est 7 fois plus petit que 28.

En langage mathématique : $4 \times 7 = 28$ soit $28 \div 4 = 7$ ou $28 : 7 = 4$



Exercice :

Complète les égalités suivantes

$$\begin{array}{llll} 6 \times \dots\dots\dots = 48 & 5 \times \dots\dots\dots = 125 & 12 \times \dots\dots\dots = 2 & 15 \times \dots\dots\dots = 3 \\ 10 \times \dots\dots\dots = 5 & 25 \times \dots\dots\dots = 5 & 120 \times \dots\dots\dots = 15 & 3 \times \dots\dots\dots = 10 \end{array}$$



Correction :

$$\begin{array}{l} 6 \times 8 = 48 \\ 5 \times 25 = 125 \\ 12 \times \frac{2}{12} = 2 \\ 15 \times \frac{3}{15} = 3 \\ 10 \times \frac{5}{10} = 5 \\ 25 \times \frac{5}{25} = 5 \\ 120 \times \frac{15}{120} = 15 \\ 3 \times \frac{10}{3} = 10 \end{array}$$



Définitions :

a et b désignent deux nombres entiers avec $b \neq 0$

Le **quotient de a par b** est le nombre qui **multiplié par b donne a**.

On le note **$a \div b$ ou $\frac{a}{b}$** . C'est un **nombre rationnel**.



Définition :

Dans la fraction $\frac{a}{b}$:

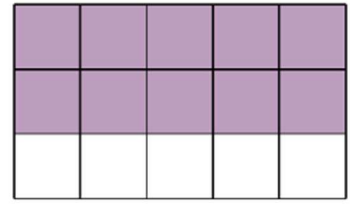
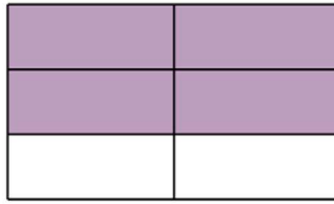
- a est appelé le **numérateur**
- b est appelé le **dénominateur**

II. Egalité de fractions



Exercice :

On a représenté ci-dessous trois fois le même rectangle avec la même surface coloriée. Chacun d'entre eux a été partagé en parts égales de différentes façons.



- 1) En utilisant les trois rectangles, trouve trois fractions égales.
- 2) En imaginant d'autres partages, trouve d'autres fractions égales aux précédentes.



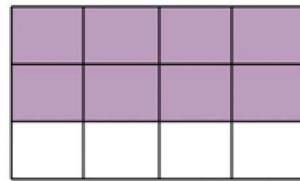
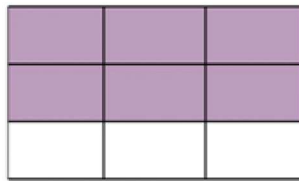
Correction :

1°)

- Le premier rectangle est divisé en trois parties égales, dont deux sont coloriées. La fraction correspondant à l'aire coloriée est donc $\frac{2}{3}$.
- Le premier rectangle est divisé en six parties égales, dont quatre sont coloriées. La fraction correspondant à l'aire coloriée est donc $\frac{4}{6}$.
- Le troisième rectangle est divisé en quinze parties égales, dont dix sont coloriées. La fraction correspondant à l'aire coloriée est donc $\frac{10}{15}$.

On a ainsi $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

2°) En découpant le rectangle coloriée comme ci-dessous on trouve que les fractions $\frac{6}{9}$ et $\frac{8}{12}$ sont égales aux précédentes.



Propriété :

On ne change pas la valeur d'une fraction quand on **multiplie** ou **divise** son numérateur et son dénominateur **par un même nombre non nul**.

On obtient une **écriture équivalente** du même nombre.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$



Exemple :

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 8}{7 \times 8} = \frac{40}{56}$$

$$\frac{110}{30} = \frac{110 \div 10}{30 \div 10} = \frac{11}{3}$$

(on dit ici que la fraction a été simplifiée)

III. Différentes écritures d'un nombre

1. Somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1



Propriété :

Une fraction peut s'écrire :

- Soit sous la forme **d'un entier**
- Soit comme la somme **d'un entier et d'une fraction inférieure à 1**.

**Exemples :**

$$\frac{12}{3} = \frac{3+3+3+3}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} = 4$$

On peut remarquer que 12 est un multiple de 3, en effet : $3 \times 4 = 12$, ou encore $12 \div 3 = 4$ donc $\frac{12}{3} = \frac{4 \times 3}{3} = 4 \times \frac{3}{3} = 4$

$$\frac{7}{2} = \frac{2+2+2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

On peut remarquer, en posant la division euclidienne de 7 par 2 que $7 = 3 \times 2 + 1$ donc

$$\frac{7}{2} = \frac{3 \times 2 + 1}{2} = 3 \times \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 3 \times 1 + \frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2}$$

**Exercice :**

Écrire les fractions suivantes sous la forme d'une somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à 1.

$$\frac{10}{7}; \frac{25}{4}; \frac{12}{4}; \frac{43}{10}; \frac{72}{10}; \frac{47}{5}; \frac{35}{8}; \frac{8}{5}; \frac{20}{5}; \frac{276}{10}$$

**Correction :**

$$\frac{10}{7} : \text{on a } 10 = 7 \times 1 + 3 \text{ donc } \frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}.$$

$$\frac{25}{4} : \text{on a } 25 = 4 \times 6 + 1 \text{ donc } \frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}.$$

$$\frac{12}{4} : \text{on a } 12 = 4 \times 3 + 0 \text{ donc } \frac{12}{4} = 3.$$

$$\frac{43}{10} : \text{on a } 43 = 10 \times 4 + 3 \text{ donc } \frac{43}{10} = 4 + \frac{3}{10}.$$

$$\frac{72}{10} : \text{on a } 72 = 10 \times 7 + 2 \text{ donc } \frac{72}{10} = 7 + \frac{2}{10}.$$

$$\frac{47}{5} : \text{on a } 47 = 5 \times 9 + 2 \text{ donc } \frac{47}{5} = 9 + \frac{2}{5}.$$

$$\frac{35}{8} : \text{on a } 35 = 8 \times 4 + 3 \text{ donc } \frac{35}{8} = 4 + \frac{3}{8}.$$

$$\frac{8}{5} : \text{on a } 8 = 5 \times 1 + 3 \text{ donc } \frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5}.$$

$$\frac{20}{5} : \text{on a } 20 = 5 \times 4 + 0 \text{ donc } \frac{20}{5} = 4.$$

$$\frac{276}{10} : \text{on a } 276 = 10 \times 27 + 6 \text{ donc } \frac{276}{10} = 27 + \frac{6}{10}.$$

**Remarque :**

Lorsqu'une fraction peut s'écrire comme la somme d'un entier et d'une fraction non nulle (différente de 0) et inférieure à 1, on peut encadrer cette fraction par deux entiers consécutifs (qui se suivent).

**Exemple :**

$$\frac{7}{2} = 3 + \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{7}{2} > 3 \text{ et } \frac{7}{2} < 4 \text{ soit } 3 < \frac{7}{2} < 4.$$

2. Fraction décimale et nombre décimaux**Définition :**

Une **fraction décimale** est une fraction dont le **dénominateur est une puissance de 10** : 1, 10, 100, 1000, 10000...

**Exemple :**

$$\frac{5}{1}; -\frac{7}{10}; \frac{215}{100} \text{ sont des fractions décimales.}$$

**Définition :**

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire avec un **nombre fini de chiffres après la virgule**.
Il peut s'écrire **sous la forme d'une fraction décimale**.

**Exemple :**

5; -0,7; 2,15 sont des nombre décimaux. En effet, on a :

$$5 = \frac{5}{1} \quad -0,7 = -\frac{7}{10} \quad 2,15 = \frac{215}{100}$$

**Remarque :**

Au final, les nombres rationnels peuvent admettre différentes écritures :

- Écriture fractionnaire
- Somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1
- Fraction décimale (certains rationnels)
- Écriture décimale (seulement les fractions décimales)

**Exercice :**

Complète le tableau suivant lorsque c'est possible :

Écriture fractionnaire	Somme d'un entier et d'une fraction inférieur à 1	Fraction décimale	Écriture décimale
	$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$		
$\frac{10}{3}$			
		$\frac{518}{10}$	
			7,5

Correction :

Écriture fractionnaire	Somme d'un entier et d'une fraction inférieur à 1	Fraction décimale	Écriture décimale
$\frac{11}{4}$	$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4}$	$\frac{275}{100}$	2,75
$\frac{10}{3}$	$\frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{3}$	IMPOSSIBLE	IMPOSSIBLE
$\frac{259}{5}$	$\frac{255}{5} + \frac{4}{5} = 51 + \frac{4}{5}$	$\frac{518}{10}$	51,8
$\frac{15}{2}$	$\frac{14}{2} + \frac{1}{2} = 7 + \frac{1}{2}$	$\frac{75}{10}$	7,5